Da bismo mogli definisati energijske odnose u elektrodinamici, pretpostavimo da *elektromagnetno polje ima energiju, impuls i moment impulsa i da i za ove veličine važe zakoni održanja, ako se u njih uključe kako mehaničke tako i elektromagnetne karakteristike posmatranih pojava.* Ovaj zahtev predstavlja ustvari *dopunski postulat*, koji će nam omogućiti da izvesne relacije dobijene kao posledica Maksvelovih jednačina interpretiramo u tom smislu. Pri tome ćemo se ograničiti na zakone održanja energije i impulsa i prvo ćemo ih formulisati *u integralnom obliku* na klasičan, nerelativistički način, a potom ćemo dobiti odgovarajuće zakone u *diferencijalnom obliku* i pokazaćemo da se ovi *diferencijalni zakoni, za razliku od integralnih, mogu prikazivati na kovarijantan način, tj. u tenzorskom obliku u svetu Minkovskog.*

1. Rad elektromagnetnog polja

Kao polazna tačka u daljem izlaganju poslužiće nam *rad elektromagnetnog polja* u nekoj oblasti V. Uočimo neko naelektrisanje dq, koje se nalazi u elementu zapremine *dV* i neka se ono pod uticajem elektromagnetnog polja pomeri za $d\mathbf{r}$. Odgovarajući rad elektromagnetnog polja, tj. rad Lorenzove sile[1] na pomeranju $d\mathbf{r}$ biće

$$d\left(dA\right) = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[dq\mathbf{E} + dq\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \right] \cdot d\mathbf{r} ,$$

a stavljajući ovde $dq = \rho\, dV$ i uvodeći strujnu gustinu $\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v}$, dobićemo

$$d\left(dA\right) = \rho\,\mathbf{E} dV \cdot d\mathbf{r} + \left(\mathbf{j} \times \mathbf{B}\right) dV \cdot d\mathbf{r} . \qquad (1)$$

Prvi član predstavlja rad električnog, a drugi rad magnetnog polja, međutim pošto je Lorenzova sila $dq\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$ na uočeno naelektrisanje uvek normalna na vektor brzine $\mathbf{v}$ odnosno strujne gustine $\mathbf{j}$, poslednji član je jednak nuli. *Prema tome, magnetno polje ne vrši nikakav rad, te je rad elektromagnetnog polja jednak radu samo električnog polja*.

Ukupan rad električnog polja na svim naelektrisanjima u posmatranoj oblasti biće

$$dA = \int_V \rho\,\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}\; dV = \int_V \rho\,\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}\; dV = \int_V \rho\,\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\; dt\; dV ,$$

odnosno

$$dA = dt \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\; dV . \qquad (2)$$

Ovaj obrazac određuje *rad elektromagnetnog polja u oblasti V* za vreme *dt*, a odgovarajući *efekat elektromagnetnog polja* iznosi

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\; dV . \qquad (3)$$

Ako još pretpostavimo da je posmatrana sredina *izotropna* i da važi poslednja materijalna jednačina $\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{str}\right)$, gornji izraz možemo napisati u obliku

$$\frac{dA}{dt} = \int \sigma\, E^2 dV + \int \sigma\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{str}\; dV . \qquad (4)$$

Ovde prvi član predstavlja efekat električnog polja izražen u vidu tzv. Džulove toplote, a drugi dopunski efekat usled prisustva stranog električnog polja.

---

[1] $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$

2. Energija elektromagnetnog polja

Polazeći od Maksvelovih jednačina i efekta elektromagnetnog polja može pod izvesnim uslovima doći do analitičkog izraza za energiju elektromagnetnog polja. Pođimo od treće i četvrte Maksvelove jednačine

$$rot\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad rot\ \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

pa množimo prvu od ovih jednačina sa $\mathbf{H}$, a drugu sa $\mathbf{E}$ i oduzimamo tako dibijene jednačine

$$\mathbf{E} \cdot rot\,\mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot rot\mathbf{E} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{5}$$

Levu stranu transformišemo pomoću identičnosti

$$div(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot rot\ \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot rot\ \mathbf{H},$$

pa gornju jednačinu možemo napisati u obliku

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - div(\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \tag{6}$$

Izraz $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ prema (3) predstavlja efekat elektromagnetnog polja po jedinici zapremine. Ako sad obe strane ove jednačine integralimo po oblasti V i pri tome stavimo

$$\int_V div(\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, dV = \oint_{S=\partial V} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S},$$

transformišući ovaj integral prema Gausovoj teoremi u površinski, dobićemo

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\, dV = -\int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV - \oint_{S=\partial V} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \tag{7}$$

Ovim obrascem je određen *ukupni efekat elektromagnetnog polja izražen samo pomoću jačina polja.* Jedan deo jednačine (7) ima oblik površinskog integrala i može se očekivati da je taj član u nekoj vezi sa energijom koja prostruji kroz graničnu površ. U prvom, zapreminskom integralu figurišu izvodi veličine $\mathbf{D}$ i $\mathbf{B}$ po vremenu, te ovaj član treba da karakteriše promenu postulirane energije elektromagnetnog polja. Međutim, o ovom članu se ne može ništa određenije reći dok se ne preciziraju veze između veličina $\mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$ kao i između $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$, tj. dok ne znamo materijalne jednačine sredine.

Pretpostavimo sad da je posmatrana sredina *bez disperzije*, tako da pri slabim i niskofrekventnim poljima važe materijalne jednačine

$$D_i = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik} E_k\,, \quad B_i = \sum_{k=1}^{3} \mu_{ik} H_k\,. \tag{8}$$

Neka su pri tome *koeficijenti* ε_{ik} *i* μ_{ik} simetrični (što proizlazi iz termodinamičkih razmatranja ako je sistem u stanju termodinamičke ravnoteže) i *proizvoljne funkcije položaja, ali nezavisne od vremena*. Ove relacije možemo napisati i simbolički u obliku

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu} \cdot \mathbf{H}, \tag{9}$$

gde su $\hat{\varepsilon}$ i $\hat{\mu}$ tenzori dielektrične konstante odnosno magnetne permeabilnosti. Pošto je veličini $\mathbf{E}$ analogna veličina $\mathbf{H}$, korisno je drugu od ovih jednačina zameniti sa

$$H_i = \sum_{k=1}^{3} \mu'_{ik} B_k \Leftrightarrow \mathbf{H} = \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B} \tag{10}$$

gde su μ'_{ik} koeficijenti dobijeni rešavanjem drugog sistema jednačina (8) po veličinama H_i, a $\hat{\mu}^{-1}$ odgovarajući tenzor magnetne permeabilnosti, inverzan tenzoru $\hat{\mu}$.

U ovom slučaju na osnovu prve materijalne jednačine (9) imamo

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}\right) - \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

ili, uvodeći konjugovan tenzor $\hat{\varepsilon}^*$ i stavljajući $\hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \hat{\varepsilon}^*$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}\right) = \mathbf{E} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \hat{\varepsilon}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{11}$$

Pošto smo pretpostavili da je tenzor $\hat{\varepsilon}$ simetričan, biće $\hat{\varepsilon}^* = \hat{\varepsilon}$ pa iz poslednje relacije proizlazi

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}\right),$$

a na sličan način, koristeći drugu materijalnu jednačinu u obliku nalazimo

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{B} \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}\right),$$

tako da imamo

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}\right). \tag{12}$$

Tada je efekat elektromagnetnog polja (13) jednak

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\, dV = -\frac{1}{2}\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}\right) dV - \oint_S \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right) \cdot dS,$$

a ako u zapreminskom integralu izmenimo redosled operacija, ovu relaciju možemo napisati u obliku

$$-\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\left(\mathbf{E} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}\right) dV = \oint_S \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right) \cdot dS + \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\, dV, \tag{13}$$

jer kad se izraz pod znakom $\partial / \partial t$ prvo integrali po oblasti *V*, dobijeni integral zavisi samo od vremena. Ovako dobijena jednačina prema samom načinu izvođenja je samo *posledica Maksvelovih jednačina i pretpostavljenih materijalnih jednačina* i predstavljaju jednu relaciju između izvesnih integralnih veličina, koju na osnovu našeg postulata o održanju energije u elektrodinamici možemo interpretirati na sledeći način.

Da bismo videli smisao izraza na levoj strani, pretpostavimo da zapremina *V* obuhvata tzv. potpuno polje. *Pod potpunim poljem podrazumeva se bilo konačna oblast na čijoj su graničnoj površi jačine električnog i magnetnog polja jednake nuli, bilo ceo prostor pod uslovom da jačine električnog i magnetnog polja na beskonačno udaljenoj graničnoj površi teže nuli bar kao* $1/r^2$*, tj. kao* $1/r^{2+\varepsilon}$*, gde je* $\varepsilon \geq 0$*.* U prvom slučaju površinski integral u gornjoj jednačini je identički jednak nuli, a u drugom na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti funkcije imamo, uzimajući za površ *s* beskonačno udaljenu sferu i računajući *r* od centra ove sfere

$$\lim_{S\to\infty} \oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot dS = \lim_{S\to\infty}\left[\left(\overline{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}\right)_n \cdot 4\pi\, r^2\right] = 0\,,$$

jer $\left(\overline{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}\right)_n$ u tačkama ove sfere teži nuli bar kao $1/r^4$. U oba ova slučaja gornji površinski integral otpada, pa se jednačina (13) svodi na

$$-\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\hat{\mu}^{-1}\cdot\mathbf{B}\right)dV = \int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\, dV\,, \tag{14}$$

pri čemu izraz na desnoj strani prema (3) predstavlja efekat elektromagnetnog polja u posmatranoj zapremini *V*. Pošto se ovaj efekat može dobiti samo na račun pretvaranja neke vrste energije, izraz na levoj strani može se interpretirati kao *smanjenje ove energije u jedinici vremena,* a sam integral kao *energija elektromagnetnog polja.* Ovako uvedena energija određena je, dakle, izrazom

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \left(\mathbf{E}\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\hat{\mu}^{-1}\cdot\mathbf{B}\right)dV = \int_V w\, dV} \tag{15}$$

gde je

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\hat{\mu}^{-1}\cdot\mathbf{B}\right)} \tag{16}$$

tzv. *gustina energije elektromagnetnog polja*, tj. energija ovog polja po jedinici zapremine. Ovim izrazom je energija elektromagnetnog polja izrađena kao *funkcija samo jačine električnog polja* $\mathbf{E}$ *i magnetne indukcije* $\mathbf{B}$ *i karakteristika sredine* ε *i* μ*, a može se izraziti i pomoću vektora električne i magnetne indukcije, koristeći opet materijalne jednačine (9)* i (10).

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\,dV} \tag{17}$$

Stavljajući ovde, prema (14)

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} = \sum_i E_i D_i = \sum_i E_i \sum_k \varepsilon_{ik} E_k = \sum_i \sum_k \varepsilon_{ik} E_i E_k$$

i na sličan način

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \sum_i \sum_k \mu'_{ik} B_i B_k \text{ ,}$$

gornji izraz možemo napisati i u <u>analitičkom obliku</u>

$$W = \frac{1}{2}\int_V \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \left(\varepsilon_{ik} E_i E_k + \mu'_{ik} B_i B_k\right) dV \tag{18}$$

Ovaj izraz dobija jednostavniji oblik ako svaki deo transformišemo u sistem svojstvenih pravaca tenzora $\hat{\varepsilon}$ odnosno $\hat{\mu}^{-1}$, koje možemo naći rešavanjem svojstvenih problema ovih tenzora

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{E} = \lambda'\mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \hat{\mu}^{-1}\cdot\mathbf{B} = \lambda''\mathbf{B}, \tag{19}$$

Kao što je poznato, zbog simetričnosti tenzora $\hat{\varepsilon}$ i $\hat{\mu}^{-1}$ sve tri svojstvene vrednosti λ' i λ'' su realne i za svaki od njih postoje tri svojstvena pravca koja su uzajamno normalna. Ako postoje tri svojstvena pravca uzmemo za ose novih koordinatnih sistema, matrice tenzora $\hat{\varepsilon}$ i $\hat{\mu}^{-1}$ svaka u svom sistemu postaju dijagonalne

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \mu^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu_3 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

gde su ε_i i μ_i $(i = 1,2,3)$ tzv. *glavne dielektrične konstante* odnosno glavne magnetne *permeabilnosti*, a izraz (18) za energiju elektromagnetnog polja prelazi u

$$W = \frac{1}{2}\int_V \sum_{i=1}^{3} \left(\varepsilon_i E_i'^2 + \frac{1}{\mu_i} B_i'^2\right) dV \tag{21}$$

Odavde neposredno vidimo da su *gustine energija električnog i magnetnog polja uvek pozitivne ili jednake nuli,* pri čemu ovaj poslednji slučaj može nastupiti samo tada ako je odgovarajuća jačina polja u posmatranoj tački jednaka nuli.

Ako je posmatrana sredina *<u>izotropna i bez disperzije</u>,* materijalne jednačine će imati oblik $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$ i $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$, gde su ε i μ skalari i u tom slučaju se dobijene relacije uprošćavaju. Tada ćemo umesto (12) neposredno imati

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2\right),$$

pa energija elektromagnetnog polja (21) dobija jednostavniji vid

$$W = \frac{1}{2}\int_V \left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) dV \equiv \int_V w\, dV \tag{22}$$

gde je gustina ove energije

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) \tag{23}$$

Rezultat (17) možemo izraziti i na drugi način, u vidu zakona održanja. Naime, na osnovu zakona kinetičke energije iz mehanike, elementarna promena kinetičke energije sistema naelektrisanih čestica u oblasti *V* jednaka je odgovarajućem elementarnom radu (3) elektromagnetnog polja na ovom sistemu

$$d\varepsilon_{kin} = d'\, A = dt \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\, dV\ , \tag{24}$$

pa relacija (4) dobija oblik

$$-\frac{d}{dt}\int_V w\, dV = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\, dV = \frac{d\varepsilon_{kin}}{dt}\ ,$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_{kin} + \int_V w\, dV \right) = 0\, , \tag{25}$$

Odavde proizlazi

$$\boxed{\varepsilon_{kin} + \int_V w\, dV = const} \tag{26}$$

tj. *<u>u potpunom polju</u> zbir kinetičke enegije naelektrisanih čestica i energije elektromagnetnog polja ostaje stalan u toku vremena.*

Zadržimo se na analizi pojma energije elektromagnetnog polja. Ova energija data je u obliku izvesnog *zapreminskog integrala,* što omogućava da se da sledeća *fizička interpretacija* ovog pojma. Pošto se energija elektromagnetnog polja izražava u vidu beskonačne sume sabiraka oblika $w\, dV$, od kojih se svaki odnosi na određeni element zapremine *dV*, to znači da *svakom elementu zapremine* dV *pripada odgovarajuža energija* $w\, dV$ *.* Odavde vidimo da je *nosilac energije elektromagnetno polje, tj. energija ovog polja lokalizovana je u prostoru sa gustinom* $w = 1/2\left(\mathbf{E} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}\right)$.

Ispitajmo kako se odnosi ovaj pojam prema teorijama dejstva na daljinu i dejstva na blizinu. Pošto je ova energija lokalizovana u prostoru elektromagnetnog polja, a videli smo da svaki poremećaj ovog polja pokazuje neposredni uticaj samo na *okolne* delove prostora i prenosi se *konačnom brzinom,* i u osnovi gornjeg shvatanja energije elektromagnetnog polja, slično kao i kod Maksvelovih jednačina, leži *shvatanje dejstva kao dejstva na blizinu.* Pri tome podvucimo da ovu energiju ne treba shvatati na mehanički način, kao npr. elastičnu energiju hipotetičkog etra. Imajući u vidu da se elektromagnetne pojave ne mogu svesti na mehaničke, ni *o energiji elektromagnetnog polja ne možemo stvarati nikakve mehaničke predstave*

3. Zakon održanja energije u elektrodinamici

Vratimo se sad jednačini (13) za *ma kakvu zapreminu V,* koja više ne obuhvata potpuno polje, tada je

$$-\frac{d}{dt}\int_V w\,dV = \oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} + \int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV\,,$$

i ako uvedemo veličinu

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}\,, \tag{27}$$

tzv. *Pointingov vektor*, pa gornju jednačinu možemo napisati u obliku

$$-\frac{d}{dt}\int_V w\,dV = \oint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} + \int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV\;. \tag{28}$$

Ova relacija može se formulisati i na drugi, ekvivalentan način, ako se efekat elektromagnetnog polja izrazi kao odgovarajuća promena kinetičke energije naelektrisanih čestica sistema u jedinici vremena

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV = \frac{d\varepsilon_{kin}}{dt}\,,$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_{kin} + \int_V w\,dV\right) = -\oint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}\,. \tag{29}$$

U relaciji (28) član s leve strane predstavlja smanjenje energije elektromagnetnog polja u uočenoj zapremini *V* u jedinici vremena, a poslednji član efekat elektromagnetnog polja u istoj zapremini. Imajući to u vidu, ove jednačine možemo interpretirati kao *matematičku formulaciju postuliranog zakona održanja energije u elektrodinamici*.

Odgovarajući diferencijalni oblik ovog zakona možemo dobiti iz relacije (28) ako na levoj strani izmenimo redosled operacija diferenciranja po vremenu i integraciji po zapremini, a na desnoj u prvom članu primenimo Gaussovu teoremu

$$-\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = \int_V \left(div\, \mathbf{P} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \right) dV \,.$$

Pošto ova jednakost mora da vađi za *bilo kakvu* oblast *V, odgovarajuži integrandi s obe strane moraju biti međusobno jednaki*

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = div\, \mathbf{P} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \,, \tag{30}$$

što predstavlja traženi *diferencijalni oblik zakona održanja energije u elektrodinamici*.

Da bismo videli smisao prvog člana s desne strane relacije (28), pođimo od toga da smanjenje energije elektromagnetnog polja može poticati kako od izvršenog rada u toj oblasti tako i od proticanja ove energije kroz graničnu površ posmatrane oblasti. Stoga prvi član s desne strane možemo interpretirati kao *energiju elektromagnetnog polja koja prostruji kroz graničnu površ u jedinici vremena,* tzv. *fluks elektromagnetne energije*

$$\Phi_W = \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \,, \tag{31}$$

pa fluks ove energije kroz element površine *dS* biće

$$d\Phi_W = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = P \cdot dS_n \,,$$

a otuda

$$\frac{d\Phi_W}{dS_n} = P \,. \tag{32}$$

Odavde se može sagledati i fizički smisao samog Poyntingovog vektora: *Pointingov vektor u ma kojoj tački svojim intenzitetom predstavlja energiju elektromagnetnog polja koja prostruji kroz normalno postavljenu jedinicu površine oko te tačke u jedinici vremena, a svojim pravcem i smerom određuje pravac i smer strujanja ove energije na tom mestu.* U tom smislu može se reći da Poyntingov vektor predstavlja *gustinu fluksa elektromagnetne energije.* Na osnovu svega ovoga možemo zakon održanja energije u elektrodinamici, izražen relacijom (28) formulisati na sledeći način. *Ako važe materijalne jednačine u obliku* $D_i = \sum_k \varepsilon_{ik} E_k$ i $B_i = \sum_k \mu_{ik} H_k$, *gde su koeficijenti* ε_{ik} i μ_{ik} *simetrični i ne zavise od vremena, smanjenja energije elektromagnetnog polja u nekoj oblasti u jedinici vremena jednako je zbiru fluksa elektromagnetne energije kroz graničnu površ i efekta elektromagnetnog polja u ovoj oblasti.* Ovaj stav o održanju energije u elektrodinamici naziva se **Pointingova teorema**. Napomenimo još da i u slučaju kad tenzori ε_{ik} i μ_{ik} nisu simetrični ili čak i u slučaju kad materijalne jednačine imaju vid integralnih relacija važi zakon o održanju energije u elektrodinamici, ali se ne može formuliati u tako jednostavnom obliku.

5. Elektromagnetna energija uzajamnog dejstva

Pomatrajmo sad dva elektromagnetna polja sa jačinama $\mathbf{E}_1$ i $\mathbf{B}_1$ odnosno $\mathbf{E}_2$ i $\mathbf{B}_2$. Energija ukupnog elektromagnetnog polja prema obrascu (15) i principu superpozicije iznosi

$$W = \frac{1}{2}\int_V \left[\left(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\right)\cdot \hat{\varepsilon} \cdot \left(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\right) + \left(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\right)\cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \left(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\right)\right] dV . \qquad (33)$$

Ako izraz rastavimo, zbog simetričnosti tenzora $\hat{\varepsilon}$ i $\hat{\mu}^{-1}$ imaćemo:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \left(\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}_1\right) dV + \frac{1}{2}\int_V \left(\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}_2\right) dV +$$
$$+\int_V \left(\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}_2\right) dV$$

što možemo napisati kraže u obliku

$$W = W_1 + W_2 + W_{12} \qquad (34)$$

gde je

$$W_i = \frac{1}{2}\int_V \left(\mathbf{E}_i \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_i + \mathbf{B}_i \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}_i\right) dV ,$$
$$W_{12} = \frac{1}{2}\int_V \left(\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}_2\right) dV \qquad (35)$$

(i=1,2). Ovde W_1 i W_2 predstavljaju energiju prvog odnosno drugog elektromagnetnog polja, a W_{12} onaj deo ukupne energije koji zavisi kako od prvog tako i od drugog elektromagnetnog polja, te karakteriše njihov uzajamni odnos. Stoga W_{12} predstavlja *energiju uzajamnog dejstva dvaju elektromagnetnih polja*, a kao primere ove vrste energije navedimo energiju uzajamnog dejstva dveju naelektrisanih sfera, kao i energiju uzajamnog dejstva sistema naelektrisanja sa spoljnim električnim poljem. Za razliku od energije sopstvenog elektromagnetnog polja, koja je uvek pozitivna, *energija uzajamnog dejstva može biti kako pozitivna tako i negativna*.

Iz gore izloženog vidi se da energija ukupnog elektromagnetnog polja, nastalog superpozicijom dvaju elektromagnetnih polja **nije** jednaka zbiru energija ovih pojedinačnih polja. To znači da *energija elektromagnetnog polja nema svojstvo aditivnosti.* Sem toga, iz identičnosti

$$\left(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\right)\cdot \hat{\varepsilon} \cdot \left(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\right) + \left(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2\right)\cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \left(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2\right) \geq 0 ,$$

koja proizlazi iz toga što ova dva člana predstavljaju gustinu energije električnog odnosa magnetnog polja sa jačinama $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$ i $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$, proizlazi

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}_1\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}_2\right) \geq \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}_2 \,,$$

a ako obe strane integralimo po zapremini *V,* na osnovu (35) dobijamo

$$W_1 + W_2 \geq W_{12} \tag{36}$$

Odavde vidimo da *energija uzajamnog dejstva dvaju elektromagnetnih polja ne može biti veća od zbira energija pojedinačnih polja.*

Dodatak A

3. Pointingova teorema. Zakon održanja energije u elektrodinamici

(*Elektrodinamika*, V. Radovanović, Beograd 2016.)

Razmotrimo sistem naelektrisanih čestica koje se kreću unutar neke zapremine. Ove čestice generišu elektromagnetno polje. Promena kinetičke energije čestica u jedinici vremena, po teoremi energije, je

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}\right)=\sum_{\alpha}q_{\alpha}(\mathbf{E}_{\alpha}+\mathbf{v}_{\alpha}\times\mathbf{B}_{\alpha})\cdot\mathbf{v}_{\alpha}=\sum_{\alpha}q_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha}\cdot\mathbf{E}_{\alpha} \tag{1}$$

gde smo sa ε_{α} označili energiju čestice indeksa α. Električno i magnetno polje u tački u kojoj se u datom trenutku nalazi naelektrisanje q_{α} su $\mathbf{E}_{\alpha}$ i $\mathbf{B}_{\alpha}$. Iz gornje formule vidimo da magnetno polje ne vrši rad. Ono može da promeni pravac i smer brzine čestice, ali ne i njen intenzitet. Prelazak sa diskretne na kontinualnu raspodelu se lako nalazi ubacivanjem delta funkcije:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}\right)&=\int d^3r\left(\sum_{\alpha}q_{\alpha}\mathbf{v}_{\alpha}\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\alpha}(t))\right)\cdot\mathbf{E}_{\alpha}\\&=\int d^3r\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\end{aligned} \tag{2}$$

Izraz $\int d^3r\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$ je rad polja u jedinici vremena (snaga) na premeštanju naelektrisanja. On govori o pretvaranju elektromagnetne energije u mehaničku.

Pretpostavimo sada da je unutar neke fuksne oblasti V prisutna makroskopska sredina koja je nepokretna, linearna i neka su efekti disperzije sredine zanemarljivi. Primenom četvrte Maksvelove jednačine i vektorskog identiteta

$$div(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot rot\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot rot\mathbf{H}$$

imamo

$$\begin{aligned}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}&=\mathbf{E}\cdot rot\mathbf{H}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\\&=-div(\mathbf{E}\times\mathbf{H})+\mathbf{H}\cdot rot\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\\&=-div(\mathbf{E}\times\mathbf{H})-\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned} \tag{3}$$

U drugom edu smo iskoristili treću Maksvelovu jednaičinu. Na osnovu prethodnog izraza imamo

$$\int_V d^3r\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = -\int_V div(\mathbf{E}\times\mathbf{H})d^3r - \int_V \left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)d^3r \tag{4}$$

Sa $\mathbf{j}$ su (4) obeležili smo zbir spoljašnje i makroskopske gustine struje u sredini.

Izraz $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}$ u opštem slučaju nije totalni diferencijal. Za sredine koje su linearne i bez disperzije ovaj izraz jeste totalni diferencijal (za dokaz videti, Elektrodinamiak, V. Radovanović 2016, str. 62). Pokazuje se da je $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})$ i $\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$. Zamenom ovih izraza u (4) dobijamo

$$\int_V d^3r\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \frac{d}{dt}\int_V d^3r\left(\frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\right) = -\oint_{S=\partial V}\mathbf{S}_p\cdot d\mathbf{S} \tag{5}$$

gde je $\mathbf{S_p} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ Pointingov vektor, jednačina (5) predstavlja Pointingovu teoremu. Izraz

$$W = \int_V d^3r\left(\frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\right)$$

je <u>elektromagnetna energija</u> , dok je podintegralni izraz

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$$

<u>gustina elektromagnetne energije</u>. U slučaju koju analiziramo veličina

$$\int_V d^3r\left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)$$

jeste vremenski izvod veličine koju interpretiramo kao energiju elektromagnetnog polja.

Pointingovu teoremu (5) možemi iskazati i rečima na sldeći način: Zbir promene elektromgnete energije u oblasti V u jedinici vremena i energije koja u jedinici vremena iscuri kroz graničnu površinu občlasti V jednaka je negativnom radu u jedinic vremena ma premeštawu anelektrisanja, tj.

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\left(\frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\right) + \int_{S=\partial V}\mathbf{S}_p\cdot d\mathbf{S} = -\int_V d^3r\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}.$$

Koristeći (2) imamo

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha \varepsilon_\alpha + W_{em}\right) = -\oint_{\partial V}\mathbf{S}_p\cdot d\mathbf{S} \tag{6}$$

odakle vidimo da je promena mehaničke energije i energije elektromagnetnog polja u jedinici vremena jednaka negativnom fluksu Pointingovog vektora kroz graničnu površ. Ovo je očigledno zako održawa energije, i još jedna formulacija Pointingove teroeme.

Ako se naelektrisanja nalaze u vakuumu, Pointingova teorema (5) ima oblik

$$\int_V d^3r\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}+\frac{d}{dt}\int_V d^3r\left(\frac{\varepsilon_0\mathbf{E}^2}{2}+\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}\right)=-\oint_{S=\partial V}\mathbf{S}_p\cdot d\mathbf{S} \tag{7}$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\left(W_{meh}+W_{em}\right)=-\oint_{S=\partial V}\mathbf{S}_p\cdot d\mathbf{S}\,. \tag{8}$$

Za polje se kaže da je potpuno ako je jednako nuli na granici konačne oblasti, ili, ako je granica u beskonačnosti, onda polje opada sa rastojanjem kao $1/r^2$. Za potpuno polje fluks Pointingovog vektora kroz graničnu površ jenula, pa je ukupna energija sistema, tj. zbir energije polja i mehaničke energije stalan. Potpuno polje je analogon izolovanog sistema u mehanici.

Pointingovu teoremu možemo napisati i u diferencijalnom obliku . Iz (5) sledi

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}+\frac{\partial u_{em}}{\partial t}+div\mathbf{S}_p=0 \tag{9}$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{meh}+u_{em})+div\mathbf{S}_p=0\,. \tag{10}$$

Prethodni izraz ima istu formu kao i jednačina kontinuiteta; to je standardan oblik zakona održanja. Sa u_{meh} označili smo zapreminsku gustinu mehaničke energije naelektrisanih čestica.

Fluks Pointingovog vektora

$$\oint_S \mathbf{S}_p\cdot d\mathbf{S}$$

je energija u jedinici vremena koja prostruji kroz zatvorenu površ S. Dimenzije Pointingovog vektora su J/sm^2.